

PhDr. Alena HOFMANOVÁ

MATEMATIKA

NÁZORNÉ LOGICKÉ RIEŠENIA SLOVNÝCH ÚLOH A ARITMETICKÝCH PRÍKLADOV

(ukážka)

všetko vysvetlené (**i vo farbe**) v **systeme, názorne a s komentovaným výkladom to najt'ažšie**, čo matematika na ZŠ má – **slovné úlohy – hračkou v prehľadných jednoduchých stručných zápisoch**

NIELEN AKO sa všetko správne rieši, ALE PREČO sa všetko rieši tak, ako sa rieši

množstvo ľahko zapamätateľných **pomôcok pri riešení slovných úloh**
postup **od jednoduchých príkladov k tým najnáročnejším**
množstvo príkladov **špeciálne PRE CHYTRÉ HLAVY**
dôraz na logické riešenia a rozvoj matematickej **logiky**
viacero riešení jedného a toho istého problému
desiatky typov slovných úloh

a

vysvetlenie všetkého ako vždy

POLOPATE

Jednotlivé uvedené strany sú často len jednou z viacerých strán, na ktorých sa uvedené učivo vysvetľuje. Sú tu strany s vysvetlením učiva, s precvičením učiva, ktoré je vysvetlené na ďalších stranách, nie tu uvedených.

OBSAH – I. časť slovné úlohy

9	Zmesi
10	Mierka na mape
11	Metre látky
11	Dvakrát viac
12	Trojčlenka
12	Zložená trojčlenka
13	Ceny
13	Ceny naopak
14	Príklady na „x“ s jednou aj dvomi neznámymi
15	Príklady na „x“ a „%“
16	Zvyšok
17	Pohyb oproti sebe
18	Pohyb za sebou
19	Pomer geometrický
20	Sudy s vodou na %, cez 1 aj 2 neznáme
21	Obsah cez 1 aj 2 neznáme
22	Roky
22	Hrany
23	Pomer aritmetický „Keby/Ak“
24	Spoločná práca Chlapci a dievčatá v percentách a číslach

FAREBNÉ STRANY

farebné strany v II. časti sú označené hrubým písmom

26	Zmesi Trojriadkový zápis slovných úloh V čom sú finty pri zápise?
32	Zmesi kávy, čaju, cukríkov
35	Mierka mapy
37	Obsah a obvod v mierke
41	Metre látky
44	Dvakrát viac
49	Trojčlenka – priama úmera
50	Trojčlenka – nepriama úmera
52	Zložená trojčlenka – priama úmera
53	Zložená trojčlenka – nepriama úmera
55	Dve nepriame úmery v jednom príklade
56	Ceny
58	Ceny naopak
60	Sudy s vodou na %
61	Sudy s vodou cez dve neznáme
64	Príklady na „x“ a „%“
72	Zvyšok
76	Poradie
78	Dve neznáme (riešenie príkladov aj cez jednu neznámu)
83	Obsah cez dve neznáme
84	Obsah cez jednu neznámu
88	Roky
92	Hrany
95	Závazok, plán
96	Pohyb
97	Pohyb – oproti sebe
100	Pohyb – za sebou
103	Pohyb – zdržanie
104	Pohyb premeny
106	Pomer aritmetický
109	Pomer geometrický
117	Pomer postupný
120	„Keby“/„Ak“/„Pokiaľ“ ... “

125	Chlapci – dievčatá v číslach a percentách
126	Cestný valec
127	Násobky
128	Kombinatorika
132	Hodinový uhol
133	Hodinový uhol
134	Spoločná práca 1. typ
135	Spoločná práca 2. typ
136	Spoločná práca 3. typ
139	Čísla cez jednu neznámu
146	Čísla cez dve neznáme
147	Vyjadrenie podielu so zvyškom
149	Sčítovanie viacciferných čísel
150	Odčítovanie viacciferných čísel
151	Sčítovanie a odčítovanie desatinných čísel
	Záporné čísla
153	Ako je to so zátvorkami?
	Sčítovanie a odčítovanie kladných a záporných čísel
155	Násobenie a delenie kladných a záporných čísel
156	Čo má v počítaní prednosť
157	Násobenie pred zátvorkou
	Ako sa zmení výsledok, keď „pošachujeme“ so zátvorkami
158	Násobenie jedno- a viacciferným číslom
159	Násobenie jedno- a viacciferným číslom
160	Násobenie jedno- a viacciferným číslom
161	Násobenie číslami 10, 100, 1000, 10000 ...
161	Delenie číslami 10, 100, 1000, 10000 ...
162	Deliteľnosť prirodzených čísel
164	Rozklad čísel na prvočísla
	Najmenší spoločný násobok
165	Najväčší spoločný deliteľ
167	Delenie jednociferným číslom bezo zvyšku
	Delenie jednociferným číslom so zvyškom
168	Delenie viacciferným číslom bezo zvyšku
169	Delenie viacciferným číslom so zvyškom
170	Delenie desatinného čísla desatinným číslom
172	Zlomky
	Ako sa premení zlomok na zmiešané číslo?
173	Úprava zlomkov do základného tvaru
	Porovnávanie zlomkov podľa veľkosti
174	Ktorý z oboch zlomkov je väčší a ktorý menší?
175	Sčítanie zlomkov
176	Odčítanie zlomkov
	Násobenie zlomkov
177	Delenie zlomkov
	Zložený zlomok
178	Premena desatinných čísel na zlomky
	Matematické zápisy
179	Výrazy, jednočleny, mnohočleny
	Sčítovanie, odčítovanie výrazov a mnohočlenov
180	Násobenie výrazov a mnohočlenov
181	Vynímanie pred zátvorkou
182	Delenie výrazov a mnohočlenov
	Rozklad na súčin
183	Opačné znamienka pred členmi v zátvorke
185	Úprava výrazov podľa vzorcov $(a + b)^2$, $(a - b)^2$, $a^2 - b^2$
188	Zlomky vo vzorcoch
189	Premena jednotiek dĺžky
190	Premena jednotiek hmotnosti
	Premena jednotiek obsahu
191	Premena jednotiek objemu

193	Lineárne rovnice
196	Sústava lineárnych rovníc s dvomi neznámym
199	Výpočet neznámej zo vzorca
200	Sčítovanie a násobenie mocnín
201	Vynímanie mocnín
	Násobenie mocnín
	Delenie mocnín
203	Druhá mocnina kladných a záporných čísel
	Umocnenie súčínu, podielu a mocniny
204	Obrovské i malé čísla ako mocniny 10^n
206	Prevod rímskych číslic na arabské a naopak
207	Finančná matematika

**Nasledujúce strany na seba nenadväzujú, sú to náhodne vybrané ukážky strán,
aby ste si spravili predstavu o tom, akým spôsobom je spracovaná
samotná učebnica/cvičebnica matematiky**

táto i iné učebnice sa dajú objednať na:

<http://eshop.hofmanova.sk/>

1. V oáze oddychuje karavána **jednohrbých** a **dvojhrbých** tiav. Narátali sme **(spolu) 50 hláv*** a **80 hrbov**. Koľko bolo jednohrbých a dvojhrbých tiav?

Ako spraviť zápis, z ktorého si **hneď** spraviš veľmi jednoducho rovnicu:

1. riadok •:

2. riadok ••:

3. riadok *:

dvojitý rámček

prvé zviera (prípadne **jeho druh**, v tomto prípade **jednohrbá t'ava**),
jedna hodnota peňazí, niečo **lacnejšie**, niečo **väčšie, dlhšie** ...
druhé zviera (prípadne **jeho druh**, v tomto prípade **dvojhrbá t'ava**),
druhá hodnota peňazí, niečo **drahšie, menšie**, niečo **kratšie** ...
hodnoty, ktoré sú v zadaní **SPOLU***

- v ňom sú **zápisy zo zadania príkladu**, z ktorých spraviš rovnicu
- z **každého riadku** si **spojíš** písmená či čísllice rovnakých farieb tak, ako sú vo farbe **vyznačené** na tejto strane a z **3. riadku** **vezmeš číslo zo stĺpca**, kde **nie je neznáma**. Tomu sa rovnica rovná.
- **podrobné vysvetlenie učia ZMESI str. 26, princíp zápisu vid' i str. 75**

A teraz ako je to v praxi?

$$\text{počet hláv}^* = \text{počet tiav}^* = \text{počet kusov}^* = \text{spolu}$$

	I. zápisy do rovnice	II. skúšky správnosti	I.	II.
1-hrbé	$x \cdot (ks)$	$1 \cdot (hrb)$	$20 \cdot (ks)$	$1 \cdot (hrb) \cdot 20 \cdot (ks) = 20 \cdot (hrbov)$
2-hrbé	$(50 - x) \cdot (ks)$	$2 \cdot (hrby)$	$(50 - 20) \cdot (ks) = 30 \cdot (ks)$	$2 \cdot (hrby) \cdot 30 \cdot (ks) = 60 \cdot (hrbov)$
spolu:	$50^* \cdot (ks)$	$80^* \cdot (hrbov)$	$50 \cdot (ks)$	$80 \cdot (hrb.)$
	$1 \cdot x \cdot + 2 \cdot (50 - x) \cdot = 80^*$ $x = 20$		<ul style="list-style-type: none"> • matematické údaje z 1. riadku •• matematické údaje z 2. riadku 	

JEDNOHRBÝCH TIAV BOLO 20 A DVOJHRBÝCH BOLO 30.

7. **50 žiakov*** si kúpilo vstupenky do kina a do divadla. **Lístok do kina** stál **2 eurá** a **lístok do divadla** stál **3 eurá**. Zaplatili za ne **(spolu*) 130 eur**. Koľko žiakov išlo do kina a koľko do divadla?

	I. zápisy do rovnice	II. skúšky správnosti	I.	II.
kino	$x \cdot (žiakov)$	$2 \cdot (€)$	$20 \cdot (žiakov)$	$20 \cdot (ž) \cdot 2 \cdot (€) = 40 \cdot (€)$
divadlo	$(50 - x) \cdot (ž.)$	$3 \cdot (€)$	$50 - 20 = 30 \cdot (žiakov)$	$30 \cdot (ž) \cdot 3 \cdot (€) = 90 \cdot (€)$
spolu	$50^* \cdot (žiakov)$	$130^* \cdot (€)$	$50 \cdot (žiakov)$	$130 \cdot (€)$
	$2 \cdot x \cdot + 3 \cdot (50 - x) \cdot = 130^*$ $x = 20$		<p>DO KINA IŠLO 20 A DO DIVADLA 30 ŽIAKOV.</p>	

13. V teste bolo **60 otázok***. Za každú **správnu (S)** dostal Martin **10 bodov** a za každú **nesprávnu (N)** mu **vzali* 5 bodov**. Po skončení testu mal **480* bodov**. Koľko otázok zodpovedal správne a koľko nesprávne?

	I. zápisy do rovnice	II. skúšky správnosti	I.	II.
správne	$x \cdot (otázok)$	$10 \cdot (bodov)$	$52 \cdot (otázok)$	$52 \cdot (ot.) \cdot 10 \cdot (b.) = 520 \cdot (b.)$
nesprávne	$(60 - x) \cdot (otázok)$	$-5 \cdot (bodov)$	$60 - 52 = 8 \cdot (otázok)$	$8 \cdot (ot.) \cdot (-5) = -40 \cdot (b.)$
spolu	$60^* \cdot (otázok)$	$480^* \cdot (bodov)$	$60 \cdot (otázok)$	$480 \cdot (b.)$

$$10 \cdot x - 5 \cdot (60 - x) = 480$$

$$x = 52$$

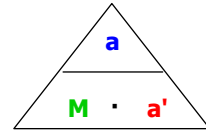
* keď mu vzali (body, peniaze ...), v rovnici treba odrátať

SPRÁVNE BOLO 52 OTÁZOK, NESPRÁVNYCH BOLO 8.

MIERKA MAPY

podrobne vid' od str. 35, tu je len vysvetlenie vo farbe

- I. **a** = vzdialenosť v skutočnosti – „km“ premeň na „cm“!
- II. **a'** = vzdialenosť na mape – ak je v „mm“, premeň na „cm“
- III. **M** = mierka mapy – vždy v „cm“



Ako na to s mierkovým trojuholníkom?
 – to, čo rátaš, si zakry v trojuholníku prstom a hneď vidíš spôsob výpočtu

vzdialenosť v skutočnosti: $a = M \cdot a'$
 vzdialenosť na mape: $a' = \frac{a}{M}$
 mierka mapy: $M = \frac{a}{a'}$

– v príkladoch s rýchlosť si uvedom, že údaj, napr.

800 km/h sú **DVA ÚDAJE**, ktoré treba vložiť do trojčlenky a využiť ďalej: **800 km ... 1 hodina**

4. Na mape s mierkou **1:150 000** je vzdialenosť medzi Moravským Jánom a Závodom **5 cm**. Aká je skutočná vzdialenosť týchto dvoch dedín na Záhorí? Prejde túto vzdialenosť turista, idúci rýchlosťou **6 km/h**, za **60 minút**? Ak nie, koľko minút mu to trvá?

- najskôr počítaj vzdialenosť cez mierku, čas turistu až potom. Úmerna je priama, čím viac času, tým viac km prejde. A nezabudni, že „6 km/h“ sú dva údaje!

I. zadanie

$$a' = 5 \text{ (cm)}$$

$$M = 1:150\,000 \text{ (cm)}$$

$$a = ? \text{ (cm)}$$

II. výpočet vzdialenosti

$$a = M \cdot a'$$

$$a = 150\,000 \cdot 5 = 750\,000 \text{ cm} = 7,5 \text{ km}$$

III. výpočet času jazdy na bicykli

$$6 \text{ km/h} = \frac{6 \text{ km}}{1 \text{ h}}$$

$$x \text{ h} = \frac{7,5 \text{ km} \cdot 1}{6} = 1,25 \text{ h}$$

IV. premena hodiny/minúty

$$1 \text{ h} = 60 \text{ minút}$$

$$x \text{ minút} = \frac{1,25 \cdot 60}{1} = 75$$

**VZDIALENOSŤ DEDÍN JE 7,5 KM.
 TURISTA TO NESTIHNE ZA HODINU, CESTA TRVÁ 75 MINÚT.**

13. Architekt má dva plány toho istého pozemku v rôznych mierkach. Na pláne s mierkou **1:100** je dĺžka jednej strany **50 cm**. Akú dĺžku má táto strana na pláne s mierkou **1:200**?

zápis rozdel' do dvoch plánov

1. plán

$$M = 1:100 \text{ (cm)}$$

$$a' = 50 \text{ (cm)}$$

$$a = ? \text{ (cm)}$$

I. výpočet strany „a“

$$a = M \cdot a'$$

$$a = 100 \cdot 50 = 5\,000$$

2. plán

$$M = 1:200 \text{ (cm)}$$

$$a = 5\,000 \text{ (cm)}$$

$$a' = ? \text{ (cm)}$$

II. výpočet strany „a“

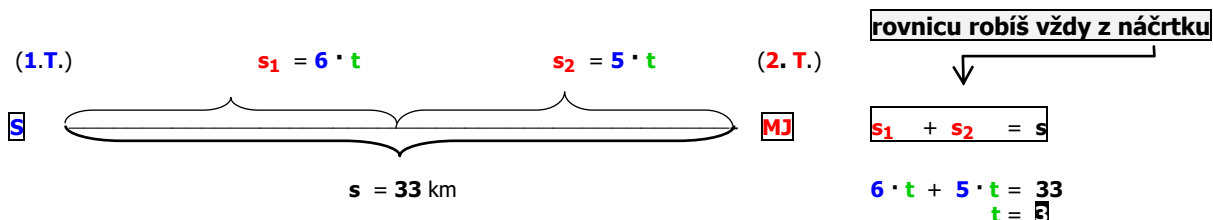
$$a' = \frac{a}{M} = \frac{5\,000}{200} = 25$$

NA PLÁNE S MIERKOU 1:200 JE POZEMOK 25 CM DLHÝ.

POHYB PROTI SEBE

Podrobné vysvetlenie a riešenie príkladov od str. 97. Tu je už prehľadné riešenie príkladov vo farbe.

1. **Vzdialenosť** medzi Senicou a Moravským Jánom je **33 km**. **Zo Senice** vyrazil **turista (1.T.)** **rýchlosťou 6 km/h**. **Rýchlosť druhého turistu (2.T.)**, ktorý vyrazil **zároveň oproti nemu z Moravského Jánu**, bola **5 km/h**. **Kedy sa stretli a v akej vzdialenosti od Moravského Jánu to bolo?**



skúšky správnosti (zároveň výpočet dĺžky jednotlivých dráh)

$s_1 = 6 \cdot t = 6 \cdot 3 = 18$ km
$s_2 = 5 \cdot t = 5 \cdot 3 = 15$ km
$s = 33$ km

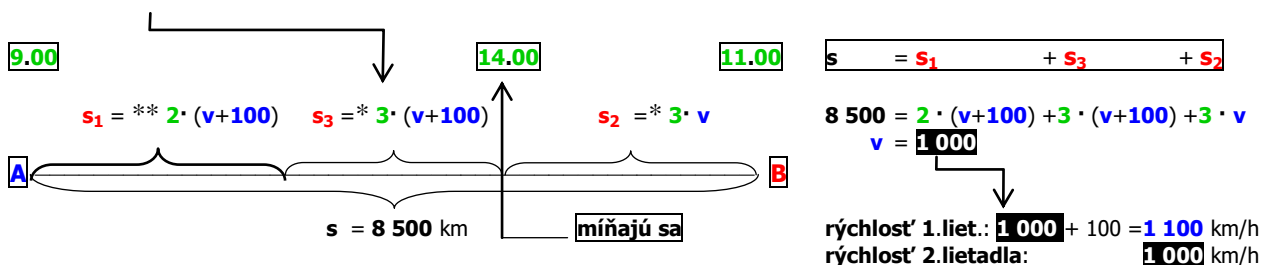
dráha 1. turistu
(stretli sa **18 km** od Senice, odkiaľ vyšiel 1. turista)

dráha 2. turistu
(stretli sa **15 km** od Moravského Jánu, odkiaľ šiel 2. turista)
= celková dráha Senica – Moravský Ján

STRETLI SA O 3 HODINY VO VZDIALENOSTI 15 KM OD MORAVSKÉHO JÁNU.

4. Medzi dvomi letiskami je vzdialenosť **8 500 km**. **O 9. hodine** vyštartovalo **z letiska A** lietadlo (jeho dráha je označená v náčrtku **hrubou svorkou**). Jeho **rýchlosť** bola **o 100 km/h vyššia ako rýchlosť lietadla**, ktoré štartovalo **oproti nemu o 11. hod z letiska B**. Obe lietadlá **sa míňajú o 14.00**. **V akej vzdialenosti od letiska A sa míňajú a akými rýchlosťami letia obe lietadlá?**

* **leteli 3 hod, keď sa míňali**. Prečo? Lebo **2. lietadlo vyštartovalo o 11.00 a míňali sa o 14.00**



skúšky správnosti (zároveň výpočet dĺžky jednotlivých dráh)

$s_1 = 2 \cdot (1000 + 100) = 2200$ km
$s_3 = 3 \cdot (1000 + 100) = 3300$ km $\Rightarrow 5500$ km
$s_2 = 3 \cdot 1000 = 3000$ km
$s = 8500$ km

prvá časť dráhy 1. lietadla:
2 hodiny letelo 1. lietadlo samotné

druhá časť dráhy 1. lietadla:
3 hodiny leteli oproti sebe obe lietadlá

celá dráha 2. lietadla:
3 hodiny leteli oproti sebe obe lietadlá
celková dráha = vzdialenosť medzi letiskami

PRVÉ LIETADLO LETELO RÝCHLOSŤOU 1 100 KM/H A DRUHÉ 1 000 KM/H. MÍŇAJÚ SA VO VZDIALENOSTI 5 500 KM OD LETISKA A.

.....

V matematike ťa logika nikdy nepustí. Tak ako má všetko svoje „PREČO“, tak má všetko aj svoje „PRETO“. Trojčlenkou veľmi jednoducho vyrátaš aj to, čo sa treba v škole učiť veľmi komplikovane. Podme si ale vysvetliť **jedinečný princíp fungovania trojčlenky**:

I. **V trojčlenke rátaš z troch údajov štvrtý**, ktorým sa posúvaš vo výpočte dopredu alebo výpočet končíš.

– **POD SEBOU** vždy musíš mať **ROVNAKÉ ÚDAJE**:
percentá, litre, kilogramy, peniaze, počet ľudí či predmetov, kilometre ...

$$\begin{array}{l} 20 \text{ \%} \quad \quad \quad 40 \text{ litrov} \\ 100 \text{ \%} \uparrow \quad \quad \quad x \text{ litrov} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 20 \text{ \%} \quad \quad \quad 40 \text{ eur} \\ 100 \text{ \%} \uparrow \quad \quad \quad x \text{ eur} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 20 \text{ \%} \quad \quad \quad 40 \text{ kg} \\ 100 \text{ \%} \uparrow \quad \quad \quad x \text{ kg} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 900 \text{ km} \quad \quad \quad 1 \text{ hodina} \\ 100 \text{ km} \uparrow \quad \quad \quad x \text{ hodín} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 \text{ hodina} \quad \quad \quad 60 \text{ minút} \\ 0,4 \text{ hodiny} \uparrow \quad \quad \quad x \text{ minút} \end{array}$$

II. **Podstatný je smer šípky. PREČO?**
Smer **ukazuje**, či je úmera **priama**, alebo **nepriama**.

PRIAMA ÚMERA: šípky smerujú **hore**

NEPRIAMA: šípky smerujú **dole**

– tam, kde máš „x“, smeruje šípka **zdola hore**, nad tým netreba ani premýšľať, dáš ju tam **automaticky** hneď **na začiatku**, ako začneš robiť so šípkami

– v **prevažnej miere** budeme pracovať **s priamou úmerou**. Nepriamu si pozri vo farbe na str. 12.

priama úmera:

	∇
čím viac/menej percent,	tým viac/menej litrov, hodín, metrov, ľudí, dní, kusov
čím – " – dní,	tým – " – hodín, minút, akejkol'vek práce ...
čím – " – minút,	tým – " – hodín, sekúnd, akejkol'vek práce ...
čím viac/menej ľudí,	tým viac/menej zjedia, vypijú, spravia akejkol'vek práce ...
	▲

III. **Niečo budeš násobiť a niečo deliť. Ako na to? Veľmi jednoducho!**

násobíš

dva údaje, ktoré sú **oproti sebe do kríža**. Vždy sú **spojené čiarou**, ktorá ti umožní upevniť si tento postup. **Aj ty si vždy spoj v zošíte tieto dva údaje oproti sebe**. Teda samozrejme vtedy, **keď sa jedná o priamu úmeru!**

delíš

tým **čísлом**, ktoré ti **jediné ostáva**, teda tým, **ktoré je do kríža s neznámou „x“**

$$\begin{array}{l} 900 \text{ km} \quad \quad \quad 1 \text{ hodina} \\ 100 \text{ km} \uparrow \quad \quad \quad x \text{ hodín} \\ \hline x = \frac{100 \cdot 1}{900} = \boxed{1,11} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 20\% \quad \quad \quad 40 \text{ kg} \\ 100\% \uparrow \quad \quad \quad x \text{ kg} \\ \hline x = \frac{100 \cdot 40}{20} = \boxed{200} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 1 \text{ hodina} \quad \quad \quad 60 \text{ min.} \\ 0,4 \text{ hodiny} \uparrow \quad \quad \quad x \text{ minút} \\ \hline x = \frac{0,4 \cdot 60}{1} = \boxed{24} \end{array}$$

Úmera je **relatívne veľmi jednoduchá časť** slovných úloh. Jediné, čo si musíme **správne uvedomiť**, je, či pôjde o **úmeru priamu alebo nepriamu**, pretože od toho závisí spôsob matematického výpočtu.

KEDY sa jedná o nepriamu úmeru? **Vtedy, keď sa v príklade jedná o:**

počet robotníkov a počet dní, čo pracujú
pokladnice a čas, ktorý pri nich stojíme

čím viac robotníkov, tým menej času práca trvá
čím menej robotníkov, tým viac času práca trvá
čím menej pokladníc, tým viac čakáme
čím viac je pokladníc, tým menej čakáme

zásoby uhlia, vzduchu na potápanie, vody...
zásoby jedla a počet ľudí
čerpadiá
rýchlosť písania

čím viac sa kúri (potápa, pije...),
čím menej sa kúri (potápa, pije),
čím viac je ľudí,
čím menej je ľudí,
čím viac je čerpadiel,
čím menej je čerpadiel,
čím rýchlejšie sa píše,
čím pomalšie sa píše,

tým menej zásoby vydržia
tým viac zásoby vydržia
tým menej zásoby vydržia
tým viac zásoby vydržia
tým menej prečerpávame
tým viac času prečerpávame
tým menej písanie **trvá**
tým viac písanie **trvá** ...

POSTUP PRI VÝPOČTE NEPRIAMEJ ÚMERY

vo farbe str. 12

čím menej pokladníc, **tým viac** čakáme
čím viac je pokladníc, **tým menej** čakáme

násobiš ●

dva údaje, ktoré sú **vedľa seba v jednom riadku**

Aj tie budú **vždy spojené čiarou** = ——— ○ ,
 ktorá ti umožní si zafixovať tento postup.

Aj ty si vždy spoj v zošite tieto **dva údaje v riadku vedľa seba** v tvojom zápise.
 Teda samozrejme vtedy, **keď sa jedná o NEpriamu úmeru!**

delíš ●●

tým **čísлом**, ktoré ti jediné ostáva, teda tým, **ktoré je v jednom riadku s neznámou „x“**

$$\begin{array}{l} 5 \text{ potápači} \quad \text{————} \bullet \quad 15 \text{ hodín} \\ 3 \text{ potápači} \quad \text{...} \quad x \text{ hodín} \uparrow \\ \hline 5 \cdot 15 \bullet \\ x = \frac{5 \cdot 15}{3} \bullet \bullet = \boxed{25} \text{ hodín} \end{array}$$

$$\begin{array}{l} 3 \text{ kosačky} \quad \text{————} \bullet \quad 15 \text{ hodín} \\ 5 \text{ kosačiek} \quad \text{...} \quad x \text{ hodín} \uparrow \\ \hline 3 \cdot 15 \bullet \\ x = \frac{3 \cdot 15}{5} \bullet \bullet = \boxed{9} \text{ hodín} \end{array}$$

NEZABUDNI! **riadne spočítaj**, resp. **odpočítaj čísla**, pokiaľ **nemáš presne niečo udané**

príklad 1 **počet tých, ktorí neprišli**, sa musí **odpočítať** od celkového počtu, ktorý mal niečo robiť
 príklad 3 ak **prišli 3 parketári, prirátas číslo 3** od pôvodného počtu ...)
 príklad 5 ak sa **prikúpia 2 kosačky**, musíš **číslo 2 pripočítať** k pôvodnému číslu/počtu kosačiek

1. **Piati potápači** majú vzduch na potápanie na **15 hodín**.

Dvaja však neprišli¹. Koľko času sa môžu potápať zvyšní potápači?

$$\begin{array}{l} \downarrow \\ 5 \text{ potápači} \quad \text{————} \bullet \quad 15 \text{ hodín} \\ 5-2 = 3 \text{ potápači} \quad \text{...} \quad x \text{ hodín} \uparrow * \\ \hline 5 \cdot 15 \bullet \\ x = \frac{5 \cdot 15}{3} = \boxed{25} \end{array}$$

skúška správnosti

$$\begin{array}{l} 5 \cdot 15 = 75 \\ 3 \cdot \boxed{25} = 75 \end{array}$$

* **túto šípku** daj ako **prvú**, až potom **si povedz**:

čím menej je potápačov,
tým viac sa môžu potápať, **tým viac** vzduchu majú => je to jasná **nepriama úmera**

POTÁPAČI SA MÔŽU POTÁPAŤ 25 HODÍN.

2. Ak je otvorených **8 pokladníc**, čakáme **3 minúty**.

Koľko budeme čakať, ak bude pracovať všetkých **12 pokladníc**?

$$\begin{array}{l} 8 \text{ pokladníc} \quad \text{————} \bullet \quad 3 \text{ minúty} \\ 12 \text{ pokladníc} \quad \text{...} \quad x \text{ minút} \uparrow * \\ \hline 8 \cdot 3 \bullet \\ x = \frac{8 \cdot 3}{12} = \boxed{2} \end{array}$$

skúška správnosti

$$\begin{array}{l} 8 \cdot 3 = 24 \\ 12 \cdot \boxed{2} = 24 \end{array}$$



túto šípku daj ako **prvú**, až potom **si povedz**:
čím viac pokladníc pracuje
tým menej sa čaká => **nepriama úmera**

BUDEME ČAKAŤ DVE MINÚTY.

Príklady o cenách sú všetko príklady, ktoré **riešime veľmi jednoducho trojčlenkou**. **Jediné, na čo treba dať pozor, je hodnota, ktorá pre nás bude znamenať východzí bod, teda 100 percent.**

– pri 1. aj 2. úprave si hneď **napiš do zátvorky hodnotu, o ktorú sa mení cena***, ** (viď hviezdičky v riešení príkladov pri 1. a 2. úprave na tejto strane). **Trojčlenkou** pre priamu úmeru **vyrátaš** k percentám **výslednú sumu**. **TROJČLENKA** je na str. 49, vo farbe 12, 13.

- **100% je vždy predchádzajúca suma nad trojčlenkou**, teda **pre 1. úpravu** je to **pôvodná cena** a **pre 2. úpravu** cena **po 1. úprave**
- **pre prípadnú tretiu úpravu je 100% cena po druhej úprave!**

- **všímaj si poriadne šípky** – **ich smer ukazuje najjednoduchší postup** pri výpočte príkladu
- **ak niečo zdražie a potom zlacnie o rovnaké množstvo percent, neznamená to návrat k pôvodnej cene**, ako by sa na prvý pohľad mohlo zdať – viď príklad č. 1.

PREČO? Jednoduché vysvetlenie, **po zdražení sa opätovné zlacnenie ráta z podstatne vyššej sumy** peňazí a **preto, keď zlacníme o to isté percento, o aké sme najprv zdražili, stojí takto zlacnený tovar menej peňazí**

1. Auto stálo **pôvodne 8 000 €**. Najskôr **zdraželo o 20 %***, potom ho **zlacnili o 20 %****. **Stálo opäť 8 000 €?**

100% je vždy suma v riadku vľavo

pôvodná cena ... **8 000** (€) *

1. úprava (+ 20%*) → $100\% + 20\% = 120\%$ →

100 %	↖	8 000 (€)
120 % ↑		x (€) ↑
$\frac{120 \cdot 8\,000}{100}$		
x =	=	9 600 (€)

100% je vždy horné číslo, tu je to **pôvodná cena**.

... **9 600** (€) *

2. úprava (- 20%)** ... → $100\% - 20\% = 80\%$ →

100 %	↖	9 600 (€)
80 % ↑		x (€) ↑
$\frac{80 \cdot 9\,600}{100}$		
x =	=	7 680 (€)

V tomto prípade **cena po prvej úprave**.

... **7 680** (€) *

AUTO NESTÁLO PO UVEDENÝCH ÚPRAVÁCH 8 000 €. STÁLO LEN 7 680 €.

2. Mobil stál **pôvodne 500 €**. Najskôr **zdražil o 15 %***, potom ho **zlacnili o 20 %****. **Koľko stál mobil po obidvoch úpravách?** (vo farbe str. 13)

100% je vždy suma v riadku vľavo

pôvodná cena ... **500** (€)

1. úprava (+ 15%*) → $100\% + 15\% = 115\%$ →

100 %	↖	500 (€)
115 % ↑		x (€) ↑
$\frac{115 \cdot 500}{100}$		
x =	=	575 (€)

100% je **pôvodná cena**.

... **575** (€)

2. úprava (- 20%)** → $100\% - 20\% = 80\%$ →

100 %	↖	575 (€)
80 % ↑		x (€) ↑
$\frac{80 \cdot 575}{100}$		
x =	=	460 (€)

100% je **cena po prvej úprave**.

... **460** (€)

MOBIL STÁL 460 EUR.

Aj tento typ príkladov sa dá riešiť **pomocou trojčlenky**:

1. typ: prilieva sa voda do nádoby

- I. najskôr** vyrátaj počet litrov, ktoré naleješ. Máš k tomu oba potrebné údaje v zadaní.
- II. potom** odrátaj od vyššieho percenta vody (nádoba po naplnení) nižší počet percent (pôvodný, teda menší obsah nádoby), ostane ti rozdiel v percentách, ktoré potrebuješ do trojčlenky
- III. nakoniec** trojčlenkou dorátaš 100%, čo je plný sud
oba výsledky doplníš do trojčlenky
priama úmera (čím viac vody naleješ, tým viac percent to bude)
a dorátaš 100%, teda koľko vody má plný sud
sleduj smer šípiek a očíslovanie v riešeníach a hneď pochopíš princíp riešenia

1. Sud s vodou je naplnený do 50%* svojho objemu. Ak doňho nalejeme 5 vedier **** vody, bude naplnený do 70% objemu **. Koľkolitrový je sud s vodou, ak 1 vedro má objem 8 litrov ***?

- I. zvlášť pracuj s vedrami a litrami vody v nich,
II. zvlášť pracuj s dvomi údajmi v percentách (nádoba po doliatí** mínus nádoba pred doliatím*)
III. zvlášť pracuj s trojčlenkou a hodnotami v percentách a v litroch

zmena v percentách

I. rátaš obsah daného počtu vedier

$$\begin{array}{l} 1 \text{ vedro } \dots \quad \quad \quad 8 \text{ l}^{***} \\ 5 \text{ vedier } \dots \quad 5 \cdot 8 \text{ l} = 40 \text{ l}^{****} \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{l} 70 \%^{**} \\ - 50 \%^{*} \\ \hline 20 \% \end{array} \quad \rightarrow$$

III. obsah celého sudu

$$\begin{array}{l} 20 \% \quad \quad \quad 40 \text{ l}^{****} \\ 100 \% \uparrow \quad \quad \quad x \text{ l} \uparrow \\ \hline \frac{100 \cdot 40}{x} = 20 = 200 \end{array}$$

SUD JE 200-LITROVÝ.

(vo farbe str. 20)

2. Sud s vodou je naplnený do 35%* svojho objemu. Ak do neho nalejeme 2 vedrá**** vody, bude naplnený do 75% ** objemu. Koľkolitrový je sud s vodou, ak 1 vedro má objem 12 litrov ***?

zmena v percentách

I. rátaš obsah daného počtu vedier

$$\begin{array}{l} 1 \text{ vedro } \dots \quad \quad \quad 12 \text{ l}^{***} \\ 2 \text{ vedrá } \dots \quad 2 \cdot 12 \text{ l} = 24 \text{ l}^{****} \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{l} 75 \%^{**} \\ - 35 \%^{*} \\ \hline 40 \% \end{array} \quad \rightarrow$$

III. obsah celého sudu

$$\begin{array}{l} 40 \% \quad \quad \quad 24 \text{ l}^{****} \\ 100 \% \uparrow \quad \quad \quad x \text{ l} \uparrow \\ \hline \frac{100 \cdot 24}{x} = 40 = 60 \end{array}$$

SUD JE 60-LITROVÝ.

3. Sud s vodou je naplnený do 65% svojho objemu. Ak do neho nalejeme 2 vedrá vody, bude naplnený do 89% objemu. Koľkolitrový je sud s vodou, ak 1 vedro má objem 15 l?

zmena v percentách

I. rátaš obsah daného počtu vedier

$$\begin{array}{l} 1 \text{ vedro } \dots \quad \quad \quad 15 \text{ l}^{***} \\ 2 \text{ vedrá } \dots \quad 2 \cdot 15 \text{ l} = 30 \text{ l}^{****} \end{array}$$

II.

$$\begin{array}{l} 89 \%^{**} \\ - 65 \%^{*} \\ \hline 24 \% \end{array} \quad \rightarrow$$

III. obsah celého sudu

$$\begin{array}{l} 24 \% \quad \quad \quad 30 \text{ l}^{****} \\ 100 \% \uparrow \quad \quad \quad x \text{ l} \uparrow \\ \hline \frac{100 \cdot 30}{x} = 24 = 125 \end{array}$$

SUD JE 125-LITROVÝ.

Veľmi zaujímavé príklady, pri ktorých **sa žiaci často mýlia**, lebo **si neuvedomia**, že **sa v nich pracuje práve so zvyškom**. My si vysvetlíme, **ako** v takom prípade **postupovať** tak, **aby sme sa** vždy **prepracovali k správne mu výsledku**.

Špeciálne si daj **pozor na výpočet zvyšku**, úplne **najlepšie** je vždy si celkom **na koniec strany zošita nakresliť v kruhovom diagrame** (často **je to v zlomku**, preto je **kruhový diagram najvýhodnejší**), čo sa **predalo, prečítalo, minulo** *... a **hneď pod diagram zapísať** vlastný **zvyšok** ** (pozri zápis s diagramami), teda to, čo nám ešte **zostalo na čítanie, mýňanie, predaj** ...

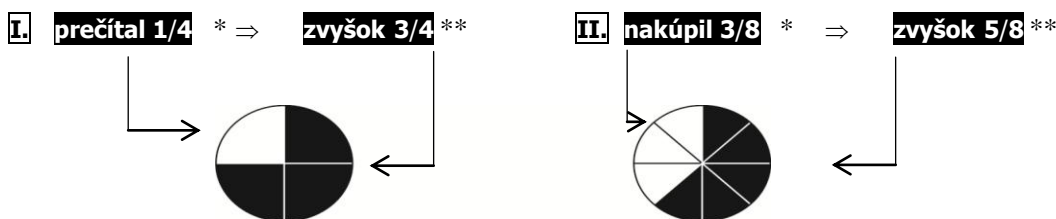
Ak máš zadanie ako napr. **v 1. príklade – prvé dva dni prečítal toľko a toľko z celej knihy** – potom pri výpočte zvyšku

- **najskôr** treba niekde **mimo** (v knihe vždy pod zápisom príkladu) **vyrátať**, **koľko prečítal spolu** a
- **až potom** z toho **určiť samotný zvyšok!**

Žiaci toto často zabúdajú a pokračujú vo výpočtoch len s tým súčtom.

– ak ti vyjde súčet dvoch údajov I. $\frac{1}{4}x^*$ \Rightarrow zvyšok je $\frac{3}{4}x^{**}$
 II. $\frac{3}{8}x^*$ \Rightarrow – " – $\frac{5}{8}x^{**}$
 III. $\frac{3}{5}x^*$ \Rightarrow – " – $\frac{2}{5}x^{**}$ = princíp zvyškových príkladov

– a **ako to vyzerá v kruhovom diagrame?**



Pozor: **len málokedy vyjde súčet „ $\frac{1}{2}x$ “ tak, že je potom aj zvyšok „ $\frac{1}{2}x$ “**
 (viď príklad č. 1, súčet po prečítaní dvoch dní je „ $\frac{1}{2}x$ “)

- „**z**“ (niečoho) znamená **v matematike** vždy **násobenie**, štvrtina $\frac{1}{4} \cdot 12 = 3$
- **počet strán, kilogramov** ... zistíš **v skúške správnosti**
- keď máš v príklade udané **desatinné čísla**, všetko **premeň na zlomky**, tak je **výpočet najpresnejší a aj sa najľahšie počíta**

PREMENA ZLOMKOV NA DESATINNÉ ČÍSLA

Toto si **naštuduj pozorne**,

pretože **sa bez týchto premien nezaobídeš**.

Nie je to ale nič ťažké,

tak **podme na to**:

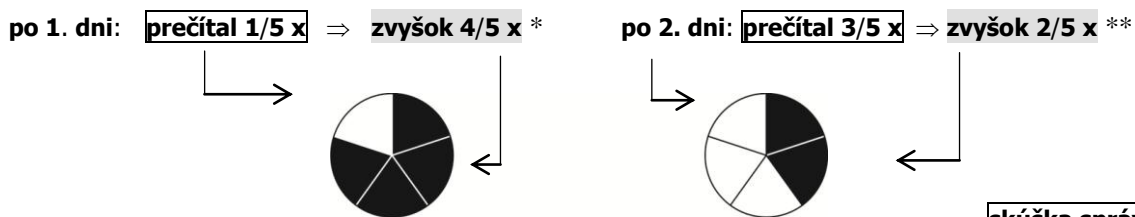
0,1	$\frac{1}{10}$					10%
0,2	$\frac{2}{10}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{5}$			12,5%
0,25		$\frac{2}{8}$		$\frac{1}{4}$		20%
		$\frac{3}{8}$				25%
0,3	$\frac{3}{10}$					37,5%
0,4	$\frac{4}{10}$		$\frac{2}{5}$			30%
0,5	$\frac{5}{10}$	$\frac{4}{8}$		$\frac{2}{4}$	$\frac{1}{2}$	40%
		$\frac{5}{8}$				50%
0,6	$\frac{6}{10}$		$\frac{3}{5}$			62,5%
0,7	$\frac{7}{10}$					60%
0,75		$\frac{6}{8}$		$\frac{3}{4}$		70%
0,8	$\frac{8}{10}$		$\frac{4}{5}$			75%
		$\frac{7}{8}$				80%
0,9	$\frac{9}{10}$					87,5%
1 celá	$= \frac{10}{10}$	$\frac{8}{8}$	$\frac{5}{5}$	$\frac{4}{4}$	$\frac{2}{2}$	90%
						100%

– **tretiny, sedminy a devätiny** v tabuľke nie sú z jednoduchého dôvodu, **nedajú sa vyjadriť celými číslami**

-
- **nezabúdaj na skúšku správnosti** a presne sleduj smer šípiek, ukazujú ti postup výpočtov

5. Maroš prečítal prvý deň $1/5$ knihy. Druhý deň prečítal $1/2$ zo zvyšných strán. Na tretí deň prečítal štvrtinu zo zvyšku strán. Zostalo mu prečítať 60 strán. Koľko strán mala kniha?

kruhový diagram ku zvyšku



skúška správnosti

1. deň $1/5 x$ (strán) **zaujíma ťa zvyšok!**
 $5/5 x - 1/5 x \Rightarrow$ **zvyšok $4/5 x$ ***

2. deň $1/2 \cdot 4/5 x^* = 2/5 x$ (strán) **rátame zvyšok po 2 dňoch:**
 $1/5 x + 2/5 x = 3/5 x$, teda
 \Rightarrow **zvyšok $2/5 x$ **** (strán)

3. deň $1/4 \cdot 2/5 x^{**} = 1/10 x$ (strán)
 4. deň **60** (strán)
 spolu **x** (strán)

$1/5 \cdot \mathbf{200} = \mathbf{40}$ strán
 $2/5 \cdot \mathbf{200} = \mathbf{80}$ strán
 $1/10 \cdot \mathbf{200} = \mathbf{20}$ strán
 $\mathbf{60}$ strán
 $\mathbf{200}$ strán

$$x = 1/5x + 2/5x + 1/10x + 60$$

$$x = \mathbf{200}$$

KNIHA MALA 200 STRÁN.

NÁSOBENIE A DELENIE Kladných a záporných čísel

Matematika je neprekonateľná a nádherná preto, že v nej nie sú výnimky a to **so znamienkami, čo platí pre sčítanie a odčítanie, platí aj v násobení a delení.**

Súčin aj podiel dvoch kladných čísel je kladné číslo.
Súčin aj podiel dvoch záporných čísel je kladné číslo.

$(+) \cdot (+) = +$	$(+) : (+) = +$
$(-) \cdot (-) = +$	$(-) : (-) = +$

Súčin aj podiel záporného a kladného čísla je záporné číslo.

$(+) \cdot (-) = -$	$(+) : (-) = -$
$(-) \cdot (+) = -$	$(-) : (+) = -$

Ak je v príklade **párny počet záporných čísel/činiteľov** (2, 4, 6 ...), **výsledok je kladný.**

$(-1) \cdot (-1) = +1$	$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = +1$	$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = +1$
------------------------	--	--

Ak je v príklade **nepárny počet záporných čísel/činiteľov** (1, 3, 5 ...), **výsledok je záporný.**

$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$	$(-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) \cdot (-1) = -1$
-----------------------------------	---

Pozor: **prednosť** má násobenie a delenie,

najskôr preto vypočítame $(-7) \cdot 3$, plus odpíšeme a **potom** počítame $42 : (-7)$

$\begin{aligned} &(-7) \cdot 3 + 42 : (-7) \\ &(-21) + (-6) = -27 \end{aligned}$	$\begin{aligned} &+100 + 12 \cdot (-5) \\ &+100 - 60 = +40 \end{aligned}$	$\begin{aligned} &-15 \cdot (-5) + 5 \cdot (-5) - (-15) \\ &+75 - 25 + 15 = +65 \end{aligned}$
$\begin{aligned} &10 \cdot (-6) - (-2) \\ &-60 + 2 = -58 \end{aligned}$	$\begin{aligned} &-18 : (-3) + 14 \cdot (-2) \\ &+6 - 28 = -22 \end{aligned}$	$\begin{aligned} &-15 \cdot (-2) - 12 \cdot (-4) - (+10) \\ &+30 + 48 - 10 = +68 \end{aligned}$
$\begin{aligned} &(-2) \cdot (-3) : (-2) \\ &+6 : (-2) = -3 \end{aligned}$		

Pozor: **NAJSKÔR** si vždy „vybav“ **ZNAMIENKO**, ak ho budeš písať až po čísle, môžeš sa ľahko pomýliť

$210 : (-2) : (-7) : (-5) = -3$
$200 : (-2) : (-2) : (-10) = -5$
$210 : (-2) : (-7) : (5) = +3$
$200 : (2) : (-2) : (-10) = +5$

delia sa tri záporné čísla, teda nepárny počet
a tak je jasné, že je **mínus**

delia sa dve záporné čísla, teda párny počet
a tak je jasné, že je **plus**

Vyrátaj – najskôr si určí znamienko, až potom násob a del’:

$35 : (-5) =$	$-48 : 8 =$	$-9 \cdot 4 =$	$-81 : 9 \cdot (-3) =$	$-6 \cdot (-8) : (-4) =$
$-7 \cdot 6 =$	$8 \cdot (-5) =$	$3 \cdot (-4) =$	$-9 \cdot (-4) : 12 =$	$-3 \cdot (-9) : (-3) =$
$-63 : (-9) =$	$-56 : (-8) =$	$-28 : (-4) =$	$-36 : (-4) : (-3) =$	$16 : (-8) \cdot (-9) =$

(výsledky: -7, -42, 7 / -6, -40, 7 / -36, -12, 7 / +3, +4, -3 / -12, -9, 18)

Vyrátaj – pozor na znamienka a na to, čo má prednosť:

$-3 \cdot (-15) - 40 - (-8)$	$= 45 - 40 + 8 = 53 - 40 = 13$
$-20 - (-3) \cdot (-5) - (-4)$	$= -20 - (+15) + 4 = -20 - 15 + 4 = +4 - 35 = -31$
$16 + (-2) \cdot (-7) + (-10)$	$= 16 + (+14) - 10 = 30 - 10 = 20$
$5 \cdot (-2) - 7 + (-8) - (-4)$	$= -10 - 7 - 8 + 4 = +4 - 25 = -21$
$-8 + (-9) \cdot (-2) - (-5)$	$= -8 + 18 + 5 = 23 - 8 = 15$
$-15 + (-5) \cdot 3 - (-4)$	$= -15 - 15 + 4 = +4 - 30 = -26$
$-8 \cdot (-9) + 8 + (-2)$	$= 72 + 8 - 2 = 80 - 2 = 78$
$-5 \cdot (-12) - 30 - (+7)$	$= 60 - 30 - 7 = 60 - 37 = 23$
$-16 - (-4) \cdot (-7) - (+6)$	$= -16 - (+28) - 6 = -16 - 28 - 6 = -50$

$11 \cdot (-2) - 30 - (-4)$	$= -22 - 30 + 4 = +4 - 52 = -48$
$-3 + (-8) \cdot (-6) - (-2)$	$= -3 + 48 + 2 = +50 - 3 = 47$
$19 - (-5) \cdot (-2) + (-7)$	$= 19 - (+10) - 7 = 19 - 10 - 7 = 19 - 17 = 2$
$5 \cdot 7 + (-35) - (-5)$	$= 35 - 35 + 5 = 5$
$45 + (-9) \cdot (-5) - (-5)$	$= 45 + 45 + 5 = 95$
$-8 \cdot (-7) + 14 - (-3)$	$= 56 + 14 + 3 = 73$
$-10 - (-4) \cdot (-5) - (+6)$	$= -10 - (+20) - 6 = -10 - 20 - 6 = -36$

ČO MÁ V POČÍTANÍ PREDNOST'

Prednosť v počítaní majú aj zátvorky, v ktorých sa objavuje násobenie. Násobenie a delenie majú prednosť aj vtedy, ak si na nás pripravia autori učebníc nejaký chytáček a zátvorku pri delení a násobení v príklade nedajú.

Pozrime si jednotlivé typy príkladov. Sú to **veľmi jednoduché príklady s jednoduchými číslami**, ale **rozhodujúce je pochopiť** na nich **princíp** a nie sa mordovať s výpočtami okolo komplikovaných a veľkých čísel.

Oba príklady počítaj rovnako. Delenie/násobenie má prednosť, či je v zátvorke**, či nie*.

$$\begin{array}{r} 100 - 20 : 4 \\ \quad \quad \quad \underbrace{\quad}^* \\ 100 - 5 = 95 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 100 - (20 : 4) \\ \quad \quad \quad \underbrace{\quad}^{**} \\ 100 - 5 = 95 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (100 - 20) : 4 \\ \quad \quad \quad \underbrace{\quad}^{\square} \\ 80 : 4 = 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (100 - 20) \cdot 4 \\ \quad \quad \quad \underbrace{\quad} \\ 80 \cdot 4 = 320 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 + 15 - 3 \cdot 5 \\ \quad \quad \quad \underbrace{\quad} \quad \underbrace{\quad} \\ 35 - \square = 20 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 + (15 - 3) \cdot 5 \\ 20 + \boxed{12 \square \square} \cdot 5 = 20 + 60 = 80 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 20 + (15 - 3 \cdot 5) \\ 20 + (15 - 15) = 20 + 0 = 20 \end{array}$$

→ **Oba príklady počítaj rovnako. Delenie/násobenie má prednosť**, či je v zátvorke**, či nie*.

↙ **Pozor:** Preto nikdy nesmieš počítať **100 - 20 = 80** a to potom **deliť štyrmi!** Na takéto počítanie by príklad vyzeral takto:

□ teda „**100 - 20**“ by muselo byť **v zátvorke**, aby si **najskôr** rátať **zátvorku** a až **potom výsledok v zátvorke delil štyrmi**

podobne je to aj s násobením **najskôr** odčítaj **v zátvorke**, **potom** tento **výsledok vynásob**

20 + 15 **môžeš sčítať**, nie je tam ani zátvorka, ani násobenie/delenie
□ od súčtu odčítaš výsledok násobenia

tu budeš **násobiť piatimi** až **výsledok násobenia v zátvorke** □□ (pozri rámček)

prednosť má tiež **násobenie**, **výsledok** násobenia **odčítaš od prvého čísla v zátvorke**, teda **od 15**

$$\begin{array}{r} 5 \cdot 5 - 3 \cdot 3 \\ \underbrace{\quad} \quad \underbrace{\quad} \\ 25 - 9 = 16 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} 5 \cdot (5 - 3) \cdot 3 \\ \quad \quad \quad \underbrace{\quad} \\ 5 \cdot (2) \cdot 3 = 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{r} (5 \cdot 5 - 3) \cdot 3 \\ \underbrace{\quad} \\ (25 \circ - 3 \cdot) \cdot 3 = 22 \cdot 3^{**} = 66 \end{array}$$

najskôr 2x násobenie (ktoré nemusí byť v zátvorke, aby malo prednosť v počítaní), potom oba **výsledky násobenia odčítať**

tu má **prednosť zátvorka**, treba ju zvlášť vyrátať a až **jej výsledok ďalej násobiť**
* päťku na samom začiatku len opíš

tu má **prednosť 5 · 5** ◦ **v zátvorke**, od výsledku odrátaš trojku * a celý **výsledok násobiš** poslednou **trojkou****

– takže **prednosť má násobenie/delenie** či je **v zátvorke**, alebo je **bez nej**

ROZKLAD ČÍSEL NA PRVOČÍSLA

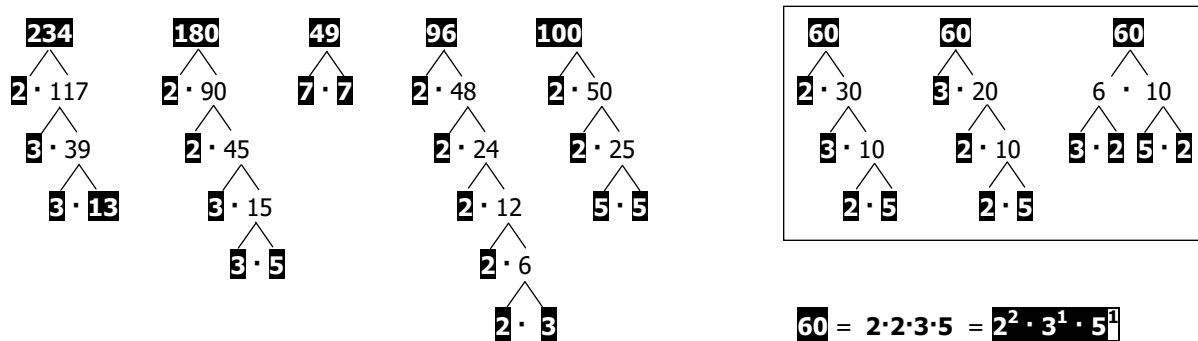
Prvočíslo je také číslo, které **je delitelné jen samé sebou a jednotkou**. **Nedá sa už ďalej rozložiť** na súčin nejakých dvoch iných čísel. Ostatné čísla sa rozkladajú na súčin až do prvočísel.

Prvočísla do 100 sú: 2 3 5 7 11 13 17 19 23 29 31 37 41 43 47 53 59 61 67 71 73 79 83 89 97

A teraz **ako sa čísla rozkladajú** na prvočísla? Hľadaj najskôr možnosti **na násobenie dvomi a tromi** – pôjdeš tak postupnými krokmi, pri ktorých je možnosť zmýlenia sa najmenšia.

Takže **roznásob** zadané číslo ako „**2** · **3**“, prípadne **5-krát zvyšné číslo**“ a potom roznásobuj výsledné čísla až do prvočísel.

Prvočísla sú v rámečkoch:

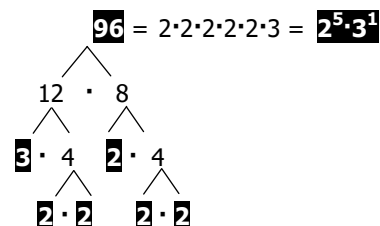
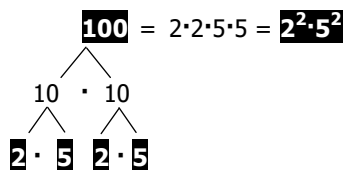


Čísla samozrejme **možno** na samom začiatku **roznásobiť** i inak, napr. **180** ako **10 · 18**, **96** ako **8 · 12**, **100** ako **10 · 10**. Potom sa **roznásobujú až do prvočísel oba činitele**. Niekedy je to však dosť neprehľadný spôsob rozkladu (viď rozklad 96). Rôzne možnosti roznásobenia na prvočísla si pozri aj na čísle 60 na predchádzajúcej strane.

60 môžeme roznásobiť okrem možností vyššie vpravo ešte **aj ako 5 · 12 = 5 · 2 · 6 = 5 · 2 · 2 · 3 = 2² · 3¹ · 5¹**.

Platí teda, že sa čísla sa môžu rozkladať **viacerými spôsobmi**, **prvočísla** v súčine **sú však vždy rovnaké**.

234	= 2 · 3 · 3 · 13	= 2 ¹ · 3 ² · 13 ¹
180	= 2 · 2 · 3 · 3 · 5	= 2 ² · 3 ² · 5 ¹
49	= 7 · 7	= 7 ²
96	= 2 · 2 · 2 · 2 · 2 · 3	= 2 ⁵ · 3 ¹
100	= 2 · 2 · 5 · 5	= 2 ² · 5 ²

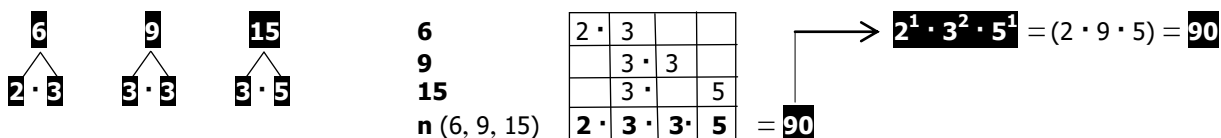


NAJMENŠÍ SPOLOČNÝ NÁSOBOK

Urči najmenší spoločný násobok čísel **6, 9, 15**.

Pri jeho určovaní **rozkladáme čísla na súčin prvočísel**. Potom zapíšeme **súčiny do tabuľky** a **najmenší spoločný násobok (= n)** bude súčinom všetkých **špeciálne zapísaných čísel** (činiteľov).

Činitele sa zapisujú pod seba len vtedy, ak sa jedná o rovnaké čísla. Ak sa objaví iné číslo, má vlastnú kolónku. Takže **nesmieš zapísať číslo 5 do stĺpca, kde sú už iné čísla, ale musíš ho zapísať do nového**.



Čísla do konečného riešenia **berieš zo všetkých „otvorených“ chlievikov** (teda aj neúplne zaplnených). Plné budeš potrebovať do učiva na ďalšej strane.

Najmenší spoločný násobok čísel 6, 9, 15 je 90.

NÁSOBENIE VÝRAZOV A MNOHOČLENOV

Pri násobení výrazov a mnohočlenov **platia** o úpravách so znamienkami **tie pravidlá, ktoré platia aj pri samotných číslach**. Takže:

$$\begin{array}{l}
 3 \cdot (x + y) - \left(\begin{array}{l} +3x \\ +2y \end{array} \right) = 3x + 3y - 3x - 2y = +y \\
 3 \cdot (x + y) - \left(\begin{array}{l} +3x \\ -2y \end{array} \right) = 3x + 3y - 3x + 2y = +5y \\
 3 \cdot (x + y) - \left(\begin{array}{l} -3x \\ -2y \end{array} \right) = 3x + 3y + 3x + 2y = 6x + 5y \\
 3 \cdot (x + y) - 3 \cdot \left(\begin{array}{l} +3x \\ +2y \end{array} \right) = 3x + 3y - 9x - 6y = -6x - 3y = -(6x + 3y) = -3(2x + 3y) \\
 3 \cdot (x + y) - 3 \cdot \left(\begin{array}{l} +3x \\ -2y \end{array} \right) = 3x + 3y - 9x + 6y = -6x + 9y = -(6x - 9y) = -3(2x - 3y) \\
 3 \cdot (x + y) - 3 \cdot \left(\begin{array}{l} -3x \\ -2y \end{array} \right) = 3x + 3y + 9x + 6y = +12x + 9y = 3(4x + 3y)
 \end{array}$$

jednoduché roznásobenie

$$(3x + 2y + 5) \cdot (-5) = * - ** 15x - 10y - 25$$

Pozor: **ako prvý** rob vždy **znamienka** a povedz ich **aj nahlas** ***plus** krát **mínus** je **mínus** a zapíš ho **až potom násob čísla/písmená** „3 krát 5 je 15“ 15** zapíš a **pridaj písmená, ak vo výraze sú**

Je jednoduché, len treba byť pozorný a násobiť vždy jedným spôsobom, nemeniť poradie činiteľov, pretože to je akurát tak cesta do matematického pekla, a teda aj k omylu.

Roznásobenie* je tenkým písmom v zátvorke, jeho výsledok, s ktorým budeš ďalej počítat', je hrubým písmom:

$$\begin{array}{l}
 (x + 1) \cdot (3x + 2y) = \begin{array}{l} (x \cdot 3x \circ) = 3x^2 \\ (x \cdot 2y \circ\circ) = 2xy \end{array} \\
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (1 \cdot 3x \bullet) = 3x \\
 (1 \cdot 2y \bullet\bullet) = 2y
 \end{array}$$

$$= 3x^2 + 2xy + 3x + 2y$$

○ **začni 1. členom** 1. zátvorky a násob* ho 1. členom 2. zátvorky
 ○○ teraz vynásob prvý člen 1. zátvorky (číslo) 2. členom 2. zátvorky
sleduj dve DOLNÉ šípky

● **vezmi 2. člen** 1. zátvorky (číslo), násob ho 1. členom 2. zátvorky
 ●● teraz vynásob druhý člen 1. zátvorky (číslo) 2. členom 2. zátvorky
sleduj dve HORNÉ šípky

ešte skontroluj, či nie sú niektoré členy rovnaké, tie sčítaj, ak nie sú, príklad je hotový – ak nesčítuješ rovnaké členy, výsledok má toľko členov ako je počet členov v zadaní príkladu

$$\begin{array}{l}
 (a + 4) \cdot (5a + 2) = \begin{array}{l} (a \cdot 5a \circ) = 5a^2 \\ (a \cdot 2 \circ\circ) = 2a \\ (4 \cdot 5a \bullet) = 20a \\ (4 \cdot 2 \bullet\bullet) = 8 \end{array} \\
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 = 5a^2 + 2a + 20a + 8 \\
 = 5a^2 + 22a + 8
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (2xy + 4x) \cdot (5x + 3y) = \begin{array}{l} (2xy \cdot 5x \circ) = 10x^2y \\ (2xy \cdot 3y \circ\circ) = 6xy^2 \\ (4x \cdot 5x \bullet) = 20x^2 \\ (4x \cdot 3y \bullet\bullet) = 12xy \end{array} \\
 = 10x^2y + 6xy^2 + 20x^2 + 12xy
 \end{array}$$

Dá sa roznásobovať i iným spôsobom, teda tak, že najskôr roznásobíme obomi členmi prvej zátvorky prvý člen druhej zátvorky ○, ○○ a potom obomi členmi prvej zátvorky druhý člen druhej zátvorky ●, ●●. Uvediem aj roznásobenie so šípkami a značkami pre tento spôsob. Určite si však vyber jeden spôsob, neskúšaj viaceré. Len si dopletieš hlavu.

$$\begin{array}{l}
 (x + 1) \cdot (3x + 2y) = \begin{array}{l} (x \cdot 3x \circ) = 3x^2 \\ (1 \cdot 3x \circ\circ) = 3x \end{array} \\
 \end{array}$$

$$\begin{array}{l}
 (x \cdot 2y \bullet\bullet) = 2xy \\
 (1 \cdot 2y \bullet) = 2y \\
 = 3x^2 + 3x + 2xy + 2y
 \end{array}$$

○ **začni 1. členom** 1. zátvorky a vynásob* ho 1. členom 2. zátvorky
 ○○ teraz vynásob druhý člen 1. zátvorky (číslo) 1. členom 2. zátvorky
sleduj dve DOLNÉ šípky

● **vezmi 1. člen** 1. zátvorky (číslo) a násob ho 2. členom 2. zátvorky
 ●● teraz vynásob 2. člen prvej zátvorky (číslo) 2. členom 2. zátvorky
sleduj dve HORNÉ šípky

$$\begin{aligned}
 (a+4) \cdot (5a+2) &= (a \cdot 5a) + (4 \cdot 5a) + (a \cdot 2) + (4 \cdot 2) \\
 &= 5a^2 + 20a + 2a + 8 \\
 &= \boxed{5a^2 + 22a + 8}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2xy+4x) \cdot (5x+3y) &= (2xy \cdot 5x) + (4x \cdot 5x) + (2xy \cdot 3y) + (4x \cdot 3y) \\
 &= 10x^2y + 20x^2 + 6xy^2 + 12xy \\
 &= \boxed{10x^2y + 20x^2 + 6xy^2 + 12xy}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (3a-4b) \cdot (-2a+3b) &= -6a^2 + 9ab + 8ab - 12b^2 = \boxed{-6a^2 + 17ab - 12b^2} \\
 (5a-6b-2c) \cdot (2a-3b) &= 10a^2 - 12ab - 4ac - 15ab + 18b^2 + 6bc = \boxed{10a^2 - 27ab - 4ac + 18b^2 + 6bc}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (2a-5b) \cdot (2a-4b) \cdot (3a-2b) &= \\
 (4a^2 - 8ab - 10ab + 20b^2) \cdot (3a-2b) &= \\
 (4a^2 - 18ab + 20b^2) \cdot (3a-2b) &= \\
 12a^3 - 54a^2b + 60ab^2 - 8a^2b + 36ab^2 - 40b^3 &= \\
 \boxed{12a^3 - 62a^2b + 96ab^2 - 40b^3} &=
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 (4x-3y+2z) \cdot (4x-5y+6z) &= \\
 16x^2 - 20xy + 24xz - 12xy + 15y^2 - 18yz &+ \\
 8xz - 10yz + 12z^2 &= \\
 16x^2 + 15y^2 + 12z^2 - 32xy + 32xz - 28yz &=
 \end{aligned}$$

najskôr násob prvú dve zátvorky

a až **potom** ich výsledok vynásob tretou

v tomto riadku je roznásobený 1. člen druhej zátvorky
v tomto 2. člen druhej zátvorky

rovnaké členy sčítaj/odčítaj

aj tu si **násob prvú celú zátvorku postupne** s prvým, druhým i tretím členom 2. zátvorky zvlášť v riadkoch, aby ťa dlhokásky rad súčinov nepoplietol
rovnaké členy sčítaj/odčítaj

Pozor na to, čo má prednosť v takto takmer rovnako zadaných príkladoch:

$$\begin{aligned}
 (4x-6) \cdot (-5x-7) &= -20x^2 - 28x + 30x + 42 = -20x^2 + 2x + 42 \\
 4x + 6 \cdot (-5x-7) &= +4x - 30x - 42 \\
 4x + 6 \cdot (-5x) - (-7) &= +4x - 30x + 7 \\
 (4x+6) \cdot (-5x) - 7 &= -20x^2 - 30x - 7
 \end{aligned}$$

násobenie dvoch zátvoriek

roznásobenie zátvorky šestkou

roznásobenie zátvorky s (-5x)

roznásobenie zátvorky (-5x)

LINEÁRNE ROVNICE

Cieľom lineárnej rovnice je zistiť hodnotu neznámej.

Základom riešenia sú „ekvivalentné“ úpravy.

Sú to také úpravy, kedy sčítaš, odčítaš, delíš či násobiš rovnakým číslom/neznamou obe strany rovnice.

Pomocou nich si preniesieš neznáme a čísla tak, aby neznáma bola na jednej strane (najčastejšie na ľavej) a čísla na druhej.

Tieto operácie napíšeš za lomkou/lomenou čiarou *. **Začneme najjednoduchšími úpravami:**

Príklady sú na ďalšej strane.

* **úprava odčítaním**

neznáma ostane naľavo, **treba presunúť** „- 10“ doprava k ďalšiemu číslu, spravíš to **opačnou operáciou** k „mínusu/odčítaniu“
teda pričítaš „+ 10“ k oboj stranám rovnice

** **úprava sčítaním**

neznáma ostane naľavo, **treba presunúť** „+ 10“ doprava, spravíš to **opačnou operáciou** k „plusu/sčítaniu“ - **teda odčítaš** „- 10“ od oboj strán rovnice

• **úprava delením**

neznáma ostane naľavo, „4·x“ nikoho nezaujímá, výsledkom rovnice je hodnota jedného „x“ - **preto** „4·x“ vydeliš štvorkou a dostaneš jedno „x“
takže aj tu robíš **opačnú operáciu** k „deleniu v zlomku (viď str. .)“
štyrmi delíš aj pravú stranu

•• úprava násobením

$$\begin{array}{rcl} x - 10 & = & 20 \quad /+10^* \\ x - 10 + 10 & = & 20 + 10 \\ x & = & 30 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} x + 10 & = & 20 \quad /-10^{**} \\ x + 10 - 10 & = & 20 - 10 \\ x & = & 10 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} 4 \cdot x & = & 100 \quad /:4 \bullet \\ 4 \cdot x : 4 & = & 100 : 4 \\ x & = & 25 \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \frac{x}{10} & = & 10 \quad / \cdot 10 \bullet \bullet \\ \frac{x}{10} \cdot 10 & = & 10 \cdot 10 \\ x & = & 100 \end{array}$$

L' = ľavá strana, P = pravá strana

skúška správnosti (ss):

$$\begin{array}{l} \text{L': } x - 10 = 30 - 10 = 20 \\ \text{P: } = 20 \end{array} \quad \boxed{\text{L' = P}}$$

(ss):

$$\begin{array}{l} \text{L': } x + 10 = 10 + 10 = 20 \\ \text{P: } = 20 \end{array} \quad \boxed{\text{L' = P}}$$

(ss):

$$\begin{array}{l} \text{L': } 4 \cdot x = 4 \cdot 25 = 100 \\ \text{P: } = 100 \end{array} \quad \boxed{\text{L' = P}}$$

(ss):

$$\begin{array}{l} \frac{x}{10} = 10 \\ \text{L': } \frac{x}{10} = 10 \\ \text{P: } = 10 \end{array} \quad \boxed{\text{L' = P}}$$

* **10**
10 si napíš kvôli kráteniu ako **1**

- v skúške správnosti je **zápis** zadaného príkladu navyše, **netreba ho tam písať**, tu je kvôli názornosti „normálna“ skúška správnosti začína až po prvom „=“, teda dosadením do pôvodného zadania príkladu

A ako je to pri zlomkoch v lineárnej rovnici?

$$\frac{x+2}{2} + \frac{3x-2}{4} = \frac{7x}{6} + 1 \quad / \cdot 12 \bullet \quad \downarrow$$

- **nájdi najmenší spoločný násobok** čísel v menovateli = v tomto prípade je to **12** •

- teraz **delíš každé číslo** v menovateli **12-kou** a **výsledok zapíšeš** ($12:2 = 6^*$, $12:4 = 3^{**}$, $12:6 = 2^{***}$) a tým, čo je v čitateli (teda hore) ho **násobíš**

- nech ťa nemýli, že za lomkou máš v 1. riadku rovnice násobenie dvanástkou.

- ty predsa **násobíš tým, čo je v zlomku** v čitateli (**hore**), **tým čo je dole** v menovateli, tým **musíš deliť**.

Pozor:

ak treba **násobiť výrazom s dvomi a viac členmi (číslami, písmenami)** ako je na ľavej strane rovnice, **daj celý výraz z čitateľa (hore) do zátvorky**, pretože v ďalšom riadku budeš roznásobovať a to pôjde podstatne lepšie, keď budeš výraz vidieť samostatne zapísaný aj so znamienkami.

$$\begin{array}{rcl} 6^* \cdot (x+2) + 3^{**} \cdot (3x-2) & = & 2^{***} \cdot 7x + 12 \\ \boxed{6x} + 12 + \boxed{9x} - 6 & = & 14x + 12 \\ 15x + 6 & = & 14x + 12 \quad /-6 \bullet \bullet \\ 15x & = & 14x + 12 - 6 \\ 15x & = & 14x + 6 \quad /-14x \\ 15x - 14x & = & 6 \\ x & = & \boxed{6} \end{array}$$

a teraz **roznásob, pozor na znamienka**

spočítaj zvlášť čísla a zvlášť neznáme

v tomto riadku neznámu nechaj vľavo, **odčítaj číslo 9** ••

neznáme potrebujú na jednej strane, takže **odrátaj 14x**

skúška správnosti: (robíš ju podľa rovnice zo zadania, nie z upravenej rovnice)

$$\frac{\boxed{6}+2}{2} + \frac{3 \cdot \boxed{6}-2}{4} = \frac{7 \cdot \boxed{6}}{6} + 1$$

$$\begin{array}{l} \text{L': } = \frac{6+2}{2} + \frac{3 \cdot 6-2}{4} = \frac{8}{2} + \frac{16}{4} = \frac{8}{2} + \frac{4}{1} = 4 + 4 = 8 \\ \text{P: } = \frac{7 \cdot 6}{6} + 1 = \frac{42}{6} + 1 = 7 + 1 = 8 \end{array} \quad \boxed{\text{L' = P}}$$